ریاضی(۳)

۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ روی $\mathbb{R}-\{0\}$ اکیداً نزولی است.

ب) در توابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+c$ مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم برابر $2c$ است.

پ) چندجمله‌ای $2x^3-5x^2+7x-10$ بر دوجمله‌ای $x-2$ بخش‌پذیر است.

ت) مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-2|<5$ یک همسایگی راست عدد ۷ است.

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵)

ب) درست (۰/۲۵)

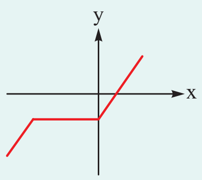
پ) درست (۰/۲۵)

ت) نادرست (۰/۲۵)

درس Box

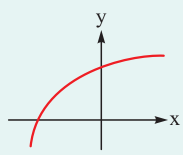
۱) توابع صعودی و نزولی:

الف) در توابع صعودی با زیادشدن x مقدار y یا زیاد می‌شود و یا ثابت می‌ماند.



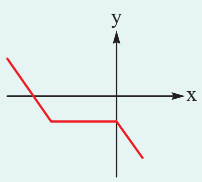
$$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

ب) در توابع اکیداً صعودی با زیادشدن x مقدار y زیاد می‌شود.



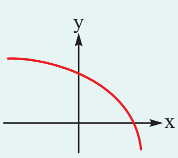
$$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

پ) در توابع نزولی با زیادشدن x مقدار y یا کم می‌شود و یا ثابت می‌ماند.



$$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

ت) در توابع اکیداً نزولی با زیادشدن x مقدار y کم می‌شود.



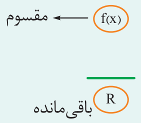
$$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

۲) در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ مینیمم و ماکزیمم تابع برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\max=|a|+c\\ \min=-|a|+c\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{طرفین را با هم جمع می‌کنیم.}}\max+\min=2c\\ \xrightarrow{\text{طرفین را از هم کم می‌کنیم.}}\max-\min=2|a|\end{array}$$

۳) در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ داریم:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{مقسوم}} = \underbrace{(x-a)}_{\text{مقسوم‌علیه}} \underbrace{Q(x)}_{\text{خارج‌قسمت}} + \underbrace{R}_{\text{باقی‌مانده}}$$



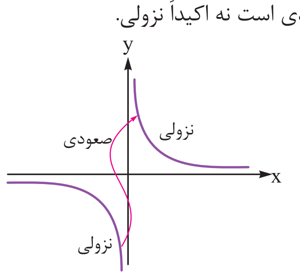
- برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$، مقدار $f(a)$ را محاسبه می‌کنیم. (a ریشهٔ مقسوم‌علیه $(x-a)$ است.)
- اگر $f(a)=0$ باشد یعنی $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۴) **همسایگی**: هر بازه شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. یعنی اگر $x_0 \in (a,b)$ باشد، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.

- **همسایگی محذوف**: نوعی از همسایگی که شامل خود آن عدد نیست یعنی آن عدد حذف شده است. مجموعهٔ $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.
- **همسایگی چپ و راست**: اگر r عددی مثبت باشد، آن‌گاه (x_0, x_0+r) یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی

الف) با توجه به شکل مشخص است که تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ غیریکنوا است، پس نه اکیداً صعودی است نه اکیداً نزولی.



ب) به درس‌باکس (۲) مراجعه کنید.

پ) اگر چندجمله‌ای $f(x)=2x^3-5x^2+7x-10$ بر دوجمله‌ای $x-2$ بخش‌پذیر باشد، باید $f(2)=0$ باشد.

$f(2)=2(2^3)-5(2^2)+7(2)-10=0$

بنابراین، بر $x-2$ بخش‌پذیر است.

ت) $|x-2|<5 \rightarrow -5<x-2<5 \rightarrow -3<x<7 \Rightarrow x\in(-3,7)$ که همسایگی راست عدد ۷ نیست.

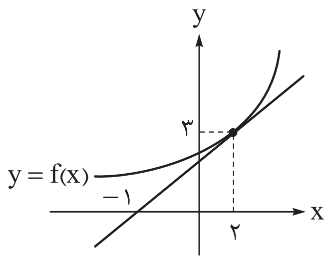
۲ در جای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$ و $g(x)=x^۳+۵$ باشد، مقدار $(gof)^{-۱}(۶)$ برابر با .... است.

ب) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\tan(۳x)$ به صورت .... و دورهٔ تناوب آن .... است.

پ) فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست از α تعریف‌شده باشد. رابطهٔ .... به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر دانست به شرط آن‌که x با مقادیر بزرگ‌تر از α به قدر کافی به α نزدیک اختیار شود.

ت) طبق نمودار مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ برابر با .... می‌باشد.



راهنمای تصحیح

الف) ۴ (۰/۲۵)

ب) $x\neq \frac{\pi}{۶}+\frac{k\pi}{۳}$ (۰/۲۵) ، $\frac{\pi}{۳}$ (۰/۲۵)

پ) $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty$ (۰/۲۵)

ت) ۱ (۰/۲۵)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) $(gof)^{-۱}(۶)$ را a در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(gof)^{-۱}(۶)=a \Rightarrow (gof)(a)=۶ \Rightarrow g(f(a))=۶$$

تابع g فقط به ازای $x=۱$ برابر ۶ می‌شود، پس داریم:

$$f(a)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a-۱=۱ \Rightarrow a=۴$$

ب) دامنهٔ تابع $y=\tan$ ☁ به صورت $\mathbb{R}-\left\{☁=k\pi+\frac{\pi}{۲} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

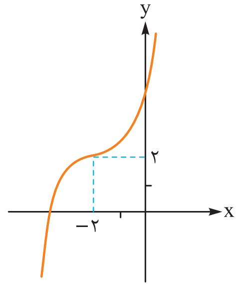
همچنین دوره تناوب تابع $y=\tan bx$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰$ را به کمک انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.

راهنمای تصحیح

$$f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰=(x+۲)^۳+۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$y=x^۳ \xrightarrow[\text{۲ واحد به سمت بالا}]{\text{۲ واحد به سمت چپ}} y=(x+۲)^۳+۲ \quad (۰/۲۵)$$



رسم نمودار (۰/۷۵)

درس Box

رسم نمودار تابع به کمک انتقال:

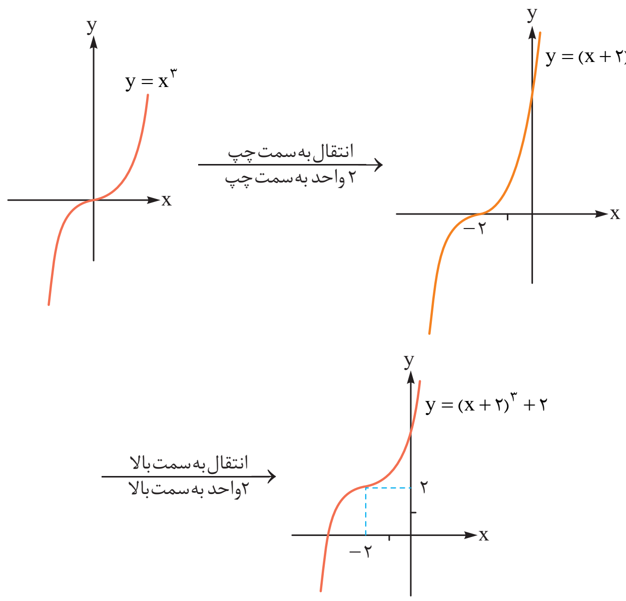
نحوهٔ اعمال تغییرات	تغییر
انتقال به اندازهٔ $(-a)$ در راستای محور xها	$f(x) \to f(x+a)$
انبساط یا انقباض با نسبت $\frac{۱}{k}$ در راستای محور xها	$f(x) \to f(kx)$
انتقال به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها	$f(x) \to f(x)+a$
انبساط یا انقباض با نسبت k در راستای محور yها	$f(x) \to kf(x)$
قرینه نسبت به محور yها	$f(x) \to f(-x)$
قرینه نسبت به محور xها	$f(x) \to -f(x)$

پاسخ خیلی تشریحی

برای رسم نمودار $f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰$ ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را با استفاده از اتحاد $(x+a)^۳=x^۳+۳ax^۲+۳a^۲x+a^۳$ ساده می‌کنیم.

$$f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸+۲=(x+۲)^۳+۲$$

حال نمودار $f(x)=(x+۲)^۳+۲$ را با استفاده از نمودار $y=x^۳$ رسم می‌کنیم.



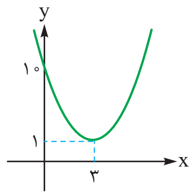
۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} - ۶x + ۱۰$ را در نظر بگیرید.

الف) بزرگ‌ترین بازه‌ای را که تابع f روی آن بازه اکیداً صعودی باشد، به دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع وارون f را دراین بازه به دست آورده و دامنهٔ آن را مشخص کنید.

راهنمای تصحیح

الف) $(۰/۲۵)$ $f(x) = x^{۲} - ۶x + ۱۰ = (x-۳)^{۲} + ۱$



بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن اکیداً صعودی است، بازهٔ $\underbrace{[۳,+\infty)}_{(۰/۵)}$ است.

(مصحح گرامی اگر به $x_S = -\frac{b}{۲a} = ۳$ نیز اشاره شود، نمرهٔ لازم را اختصاص دهید.)

ب)

$y = (x-۳)^{۲} + ۱ \Rightarrow (x-۳)^{۲} = y - ۱$ $(۰/۲۵)$

$x - ۳ = \pm\sqrt{y-۱} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-۱} + ۳$ $(۰/۲۵)$ $\xrightarrow{x \geq ۳} f^{-۱}(x) = \sqrt{x-۱} + ۳$ $(۰/۵)$

$D_{f^{-۱}} = \mathbb{R}_f = x \geq ۱$ $(۰/۲۵)$

درس Box

تابع وارون:

- اگر در تابع f جای x و y یعنی مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب را عوض کنیم، وارون تابع به دست می‌آید.
- اگر تابع یک‌به‌یک باشد می‌گوییم وارون‌پذیر است و وقتی وارون‌پذیر است یعنی تابع وارون دارد.
- اگر نقطهٔ (a,b) روی تابع f قرار داشته باشد، آن‌گاه (b,a) روی $f^{-۱}$ قرار دارد.

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-۱}(b) = a$$

- برای رسم تابع وارون $(f^{-۱})$ کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ قرینه کنیم.

پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون:

برای پیداکردن تابع وارون در ضابطهٔ f، اول x را برحسب سایر عبارات می‌نویسیم و سپس جای x و y را عوض کرده و $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم.

برد تابع = دامنهٔ تابع وارون

$D_{f^{-۱}} = R_f$

دامنهٔ تابع = برد تابع وارون

$R_{f^{-۱}} = D_f$

۵ اگر $f(x)=۲+\sqrt[۳]{x}$ و $(fog)(x)=\frac{x}{۳}+۲$ باشد ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

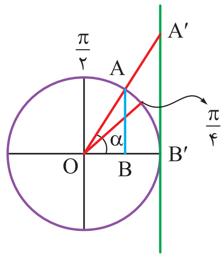
$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x}{۳}+۲$$

$$\xrightarrow{f(x)=۲+\sqrt[۳]{x}} f(g(x))=\overbrace{۲+\sqrt[۳]{g(x)}}^{(۰/۲۵)}=\frac{x}{۳}+۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[۳]{g(x)}=\frac{x}{۳}}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{\text{توان ۳}} g(x)=\frac{x^۳}{۲۷}\ (۰/۲۵)$$

۶ با توجه به محورهای سینوس و کسینوس و تانژانت در بازهٔ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$، مقادیر $\sin x$ ، $\cos x$ و $\tan x$ را با هم مقایسه کنید.

راهنمای تصحیح



(۰/۲۵)

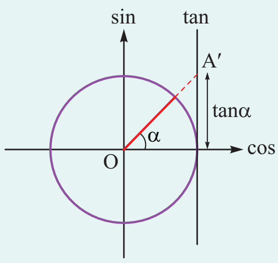
$$\begin{matrix} AB = \sin\alpha \\ A'B' = \tan\alpha \end{matrix} \xrightarrow{A'B'>AB} \tan\alpha > \sin\alpha$$

$$OB = \cos\alpha \xrightarrow{A'B'>AB>OB} \tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$$ (۰/۵)

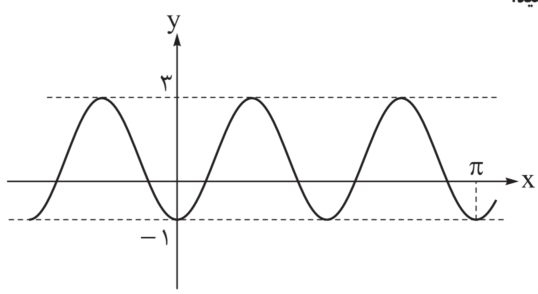
درس Box

تانژانت

اگر در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور کسینوس خط $x = 1$ را بر دایرهٔ مثلثاتی مماس کنیم، به این خط، محور تانژانت می‌گوییم که برای پیداکردن تانژانت یک زاویه از مرکز دایره به انتهای آن زاویه وصل می‌کنیم و خط را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند.



۷ ضابطه‌ای به صورت $f(x)=a\cos bx+c$ برای نمودار زیر بنویسید.



راهنمای تصحیح

$$Max=\overbrace{|a|+c}^{(۰/۲۵)}=۳$$
$$min=\underbrace{-|a|+c}_{(۰/۲۵)}=-۱$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲c=۲\Rightarrow \boxed{c=۱}\ (۰/۲۵)\Rightarrow \boxed{|a|=۲}\ (۰/۲۵)\xrightarrow{\text{در } x=۰ \text{ مینیمم دارد}} a=-۲\ (۰/۲۵) \\ ۲T=\pi\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}\ (۰/۲۵):\ \underbrace{\frac{۲\pi}{|b|}}_{(۰/۲۵)}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \boxed{|b|=۴}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\xrightarrow{f(x)}=-۲\cos ۴x+۱\ (۰/۲۵)$$

درس Box

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع برابر است با:

$$Max=|a|+c$$
$$min=-|a|+c$$

و دورهٔ تناوب این توابع برابر است با: $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۸ مقدار $\cos\frac{\pi}{8}$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \; (0/25) \xrightarrow[2\alpha=\frac{\pi}{4}]{\alpha=\frac{\pi}{8}} \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \; (0/25) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+2}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \; (0/25)$$

$$\xrightarrow[\underbrace{\cos\frac{\pi}{8}>0}_{(0/25)}]{\text{در ربع اول } \frac{\pi}{8}} \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \; (0/25)$$

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \begin{cases} \xrightarrow{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha} \cos 2\alpha = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \\ \xrightarrow{\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

می‌دانیم $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ است. اگر α را $\frac{\pi}{8}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

چون در ربع اول کسینوس یک مقدار مثبت است، پس مقدار کسینوس برابر است با:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

۹ معادلهٔ $\cos ۲x - ۵\sin x + ۶ = ۰$ را حل کنید.

راهنمای تصحیح

$$\cos ۲x - ۵\sin x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x} \overbrace{۱ - ۲\sin^۲ x - ۵\sin x + ۶ = ۰}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow -۲\sin^۲ x - ۵\sin x + ۷ = ۰$$

$$۲\sin^۲ x + ۵\sin x - ۷ = ۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow (۲\sin x + ۷)(\sin x - ۱) = ۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \ (۰/۲۵) \\ \sin x = -\frac{۷}{۲} \ \text{غیرقابل قبول} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

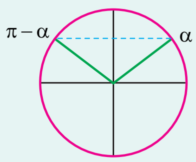
$$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (۰/۵)$$

اگر به جای تجزیه از روش دلتا هم نوشته شده باشد نمره تعلق می‌گیرد.

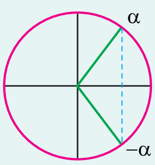
درس Box

معادلهٔ مثلثاتی معادله‌ای است که در آن مجهول معادله، در کمان یک نسبت مثلثاتی باشد.

حل معادلات مثلثاتی:



$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha = (۲k+۱)\pi - \alpha \end{cases}$$



$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases} \quad \text{یا} \quad x = ۲k\pi \pm \alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا سعی می‌کنیم معادله را برحسب یک نسبت مثلثاتی بنویسیم:

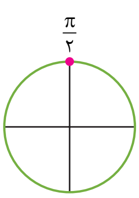
$$\cos ۲x - ۵\sin x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x} ۱ - ۲\sin^۲ x - ۵\sin x + ۶ = ۰$$

$$-۲\sin^۲ x - ۵\sin x + ۷ = ۰ \Rightarrow ۲\sin^۲ x + ۵\sin x - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲\sin x + ۷)(\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲\sin x + ۷ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۷}{۲} \quad \text{غیرقابل قبول} \\ \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = ۱ \end{cases}$$

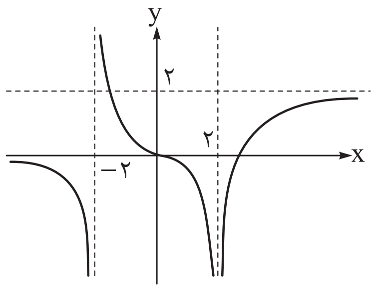
می‌دانیم $-۱ \le \sin x \le ۱$ است؛ بنابراین $\sin x$ نمی‌تواند برابر $-\frac{۷}{۲}$ باشد.

حال به حل معادلهٔ $\sin x = ۱$ می‌پردازیم:



$$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

۱۰ با توجه به نمودار تابع **f** حاصل حدهای داده‌شده را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] =$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$

ت) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} (fof)(x) =$

راهنمای تصحیح

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۰$ (۰/۲۵)

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \underbrace{[۲^-]}_{(۰/۲۵)} = ۱$ (۰/۲۵)

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -\infty$ (۰/۲۵)

ت) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} (fof)(x) = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}_{(۰/۲۵)} = ۲$ (۰/۲۵)

درس Box

حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت:

حد	اگر x	آن‌گاه مقدار تابع $f(x)$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$	از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر شود.	از هر مقدار دلخواهی به L نزدیک می‌شود.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$	از هر عدد دلخواهی کوچک‌تر شود.	از هر مقدار دلخواهی به L نزدیک می‌شود.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	از هر مقدار دلخواهی به a نزدیک شود.	از هر مقدار دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	از هر مقدار دلخواهی به a نزدیک شود.	از هر مقدار دلخواهی کوچک‌تر می‌شود.

۱۱ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3-[x]}{|5-x|}$

پ) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\frac{1+\cos 2x}{\sin x}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+5}$

راهنمای تصحیح

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}\times\overbrace{\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}}^{(0/25)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\overset{-(x-1)}{4-(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{x+3})}\overset{(0/25)}{=}\frac{-1}{2(4)}=-\frac{1}{8}$ (۰/۲۵)

ب) $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{3-[x]}{|5-x|}=\frac{3-5}{0^+}\overset{(0/25)}{=}-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3-[x]}{|5-x|}=\frac{3-4}{0^+}=-\infty$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5}\frac{3-[x]}{|5-x|}=\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ (۰/۲۵)

پ) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\frac{1+\cos 2x}{\sin x}=\underbrace{\frac{1+\cos 2\pi}{\sin \pi^+}}_{(0/25)}=\underbrace{\frac{1+1}{0^-}}_{(0/25)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$ (۰/۲۵)

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+5}=\underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{|x|}{2x}}_{(0/25)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x}{2x}}_{(0/25)}=-\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

درس Box

۱) می‌دانیم برای پیداکردن حد یک کسر به صورت $\frac{f}{g}$ وقتی که $x\to a$ به جای x مقدار a را قرار می‌دهیم و بعضی وقت‌ها کسر به شکل $\frac{0}{0}$ (حالت مبهم) تبدیل می‌شود که باید عامل صفرکننده را در صورت و مخرج پیدا و با هم ساده کنیم که برای رفع ابهام می‌توان از تجزیه، تقسیم یا ضرب در مزدوج استفاده کرد که برای هر کدام مثالی آورده‌ایم:

حذف عامل صفرکننده با استفاده از تجزیه: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^3-125}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^3-125}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x+5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x^2+5x+25)}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+5}{x^2+5x+25}=\frac{5+5}{5^2+5(5)+25}=\frac{10}{75}=\frac{2}{15}$

حذف عامل صفرکننده با استفاده از تقسیم: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{\underset{(x-1)(x+1)}{\underbrace{x^2-1}}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+4x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{9}{2}$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-4 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+4x+4 \\ \quad 4x^2-4 & \\ -\ (4x^2-4x) & \\ \quad 4x-4 & \\ -\ (4x-4) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲} = \lim\limits_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{\sqrt{x+۱}-۲} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}$:حذف عامل صفرکننده با استفاده از ضرب در مزدوج

$$= \lim\limits_{x\to ۳} \frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}{\cancel{(x+۱-۴)}} = \lim\limits_{x\to ۳} (x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲) = ۶\times ۴ = ۲۴$$

۲)

در توابع کسری مثل $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد مخرج کسر صفر باشد و حد صورت کسر مخالف صفر، حالت‌های زیر را داریم:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عددمنفی}}{۰^-} = +\infty$$

۳)

فرض کنید f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به صورت $ax^n + bx^{n-۱} + \dots$ که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \dots) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} ax^n$$

۱۲ با استفاده از تعریف مشتق، شیب خط مماس بر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}+۵x$ را در $x=۲$ به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۵x-۱۴}{x-۲}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\overbrace{(x+۷)\cancel{(x-۲)}}^{(۰/۲۵)}}{\cancel{x-۲}}=۲+۷=۹\quad (۰/۲۵)$$

درس Box

مشتق تابع f در نقطهٔ a

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد. حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

برای پیداکردن شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ می‌توانیم حد زیر را نیز به دست آوریم.

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

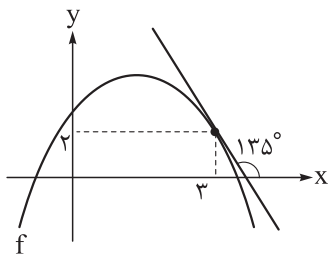
یه‌جور دیگه

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\underbrace{\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^{۲}+۵(۲+h)-۱۴}{h}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۴+۴h+h^{۲}+۱۰+۵h-۱۴}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\overbrace{\cancel{h}(۹+h)}^{(۰/۲۵)}}{\cancel{h}}=۹\quad (۰/۲۵)$$

۱۳ با توجه به نمودار روبه‌رو حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+f(x)-۶}{x-۳}$ را به دست آورید.



راهنمای تصحیح

$$\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+f(x)-۶}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲^۲+۲-۶}{۳-۳}=\frac{۰}{۰}\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+f(x)-۶}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\overbrace{(f(x)+۳)(f(x)-۲)}^{(۰/۲۵)}}{x-۳}=\underbrace{\lim\limits_{x\to ۳}(f(x)+۳)\times\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۲}{x-۳}}_{(۰/۲۵)}$$

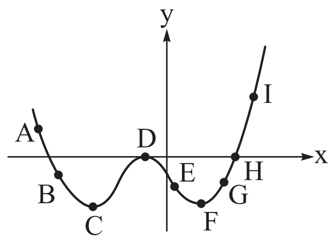
$$\xrightarrow[f(۳)=\lim\limits_{x\to ۳}f(x)=۲]{۲=f(۳)}\overbrace{۵f'(۳)}^{(۰/۲۵)}=۵\tan ۱۳۵°=۵(-۱)=-۵\quad (۰/۲۵)$$

۱۴ در نمودار مقابل که مربوط به تابع f است:

الف) در کدام نقاط مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق عددی منفی است؟

ب) در کدام نقاط $f \times f' < 0$ است؟

پ) در کدام نقطه هم مقدار تابع و هم مقدار مشتق برابر صفر است؟



راهنمای تصحیح

الف) A (۰/۲۵)

ب) A و G (۰/۵) هر مورد (۰/۲۵)

پ) D (۰/۲۵)

پاسخ خیلی تشریحی

نام نقطه	مقدار تابع (f)	مشتق تابع در آن نقطه (f')	$f \cdot f'$
A	+	−	−
B	−	−	+
C	−	۰	۰
D	۰	۰	۰
E	−	−	+
F	−	۰	۰
G	−	+	−
H	۰	+	۰
I	+	+	+